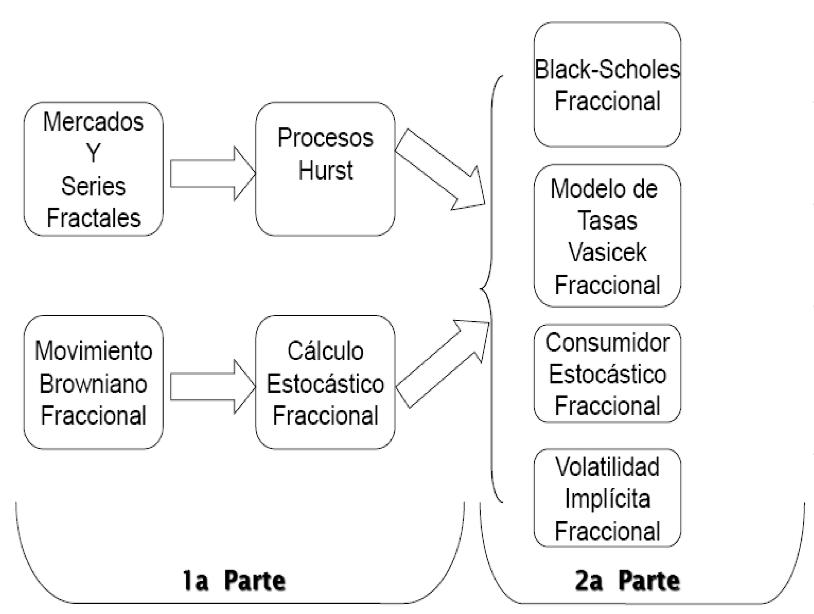
Mercados fractales y valuación de derivados financieros

Autor: Guillermo Sierra Juárez
Posgrado Ingeniería UNAM
gsierraj@comunidad.unam.mx

El **objetivo** principal de esta trabajo es la generalización de los siguiente resultados fundamentales de finanzas cuantitativas:
- La valuación de opciones europeas
- La estructura de plazos de tasas del modelo Vasicek
- El planteamiento y solución optima de consumo y cartera del problema del consumidor estocástico.
-El modelo de volatilidad implícita estocástica

Con base a un proceso estocástico conocido como movimiento browniano fraccional, que a diferencia del movimiento browniano tradicional, puede incorporar en las series financieras características de persistencia, antipersistencia e independencia.
Además se busca la aplicación de la metodología (R/S) (de la teoría de fractales) a series representativas del mercado de México y Estados Unidos

Estructura del Trabajo



Comparativo de Hipotesis de Mercados Eficientes vs Hipotesis de Mercados Fractales

HME
- Precios reflejan toda la información actualizada
- Reacción inmediata a nueva información
- Observaciones independientes o de memoria corta
- Rendimientos de cualquier activo se distribuyen como normales

HMF
- Los precios están cerca de ser justos en mercados líquidos
- La fuente de la liquidez proviene de la existencia de diferentes horizontes de inversión
- La crisis ocurren cuando hay baja liquidez y alto volumen comerciado

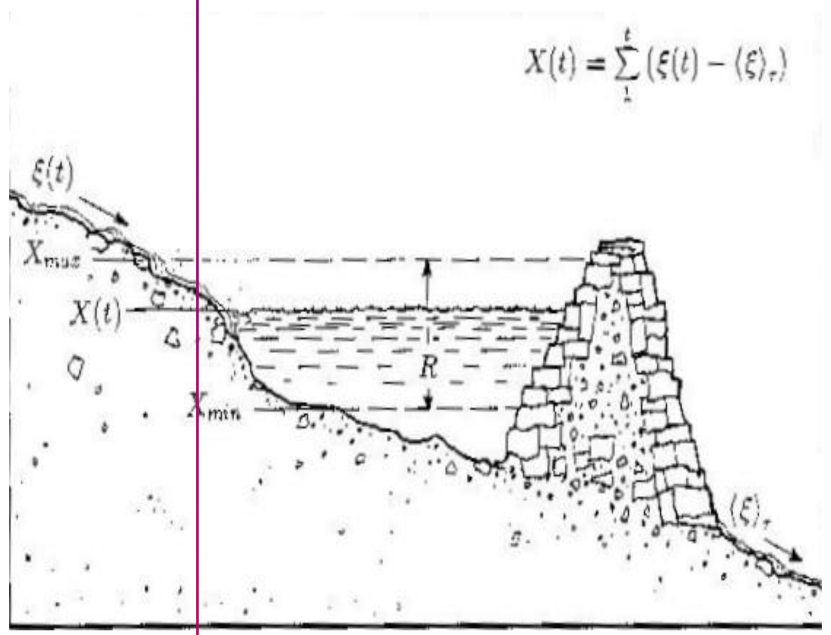
Propiedades de Fractales

Una de las propiedad más importantes de los fractales es la autosimilaridad, que significa que todas las partes están relacionadas con el todo y las otras partes . Esta propiedad hace a los fractales invariantes en la escala.

Procesos Hurst

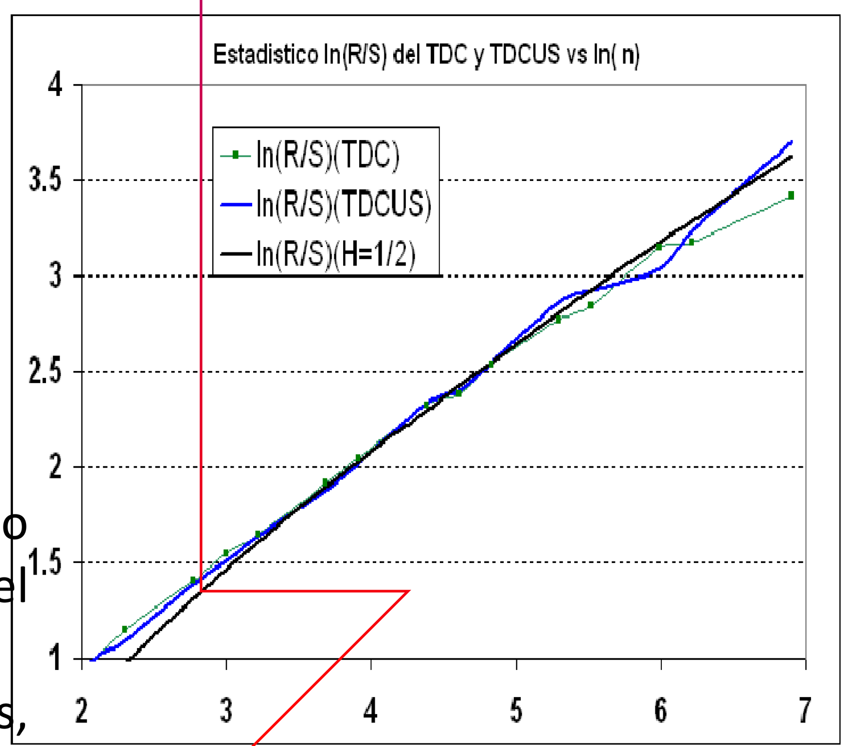
El primero en estudiar las series fractales fue el científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978).Posteriormente, sus ideas fueron retomadas por Mandelbrot quien colocó su trabajo en un contexto más general bajo el nombre de Análisis de Rango Reescalado (R/S) Hurst era constructor de presas en los inicios del Siglo XX y por un tiempo trabajó en el proyecto de la presa del río Nilo. En el momento del diseño de la presa se le presentó un problema interesante de hidrología. Hurst al resolver su problema relacionado con la capacidad de la presa encontró $(R/S) = cn^H$

Donde (R/S) es una medida estandarizada de la dispersión de los datos por cada segmento de n datos



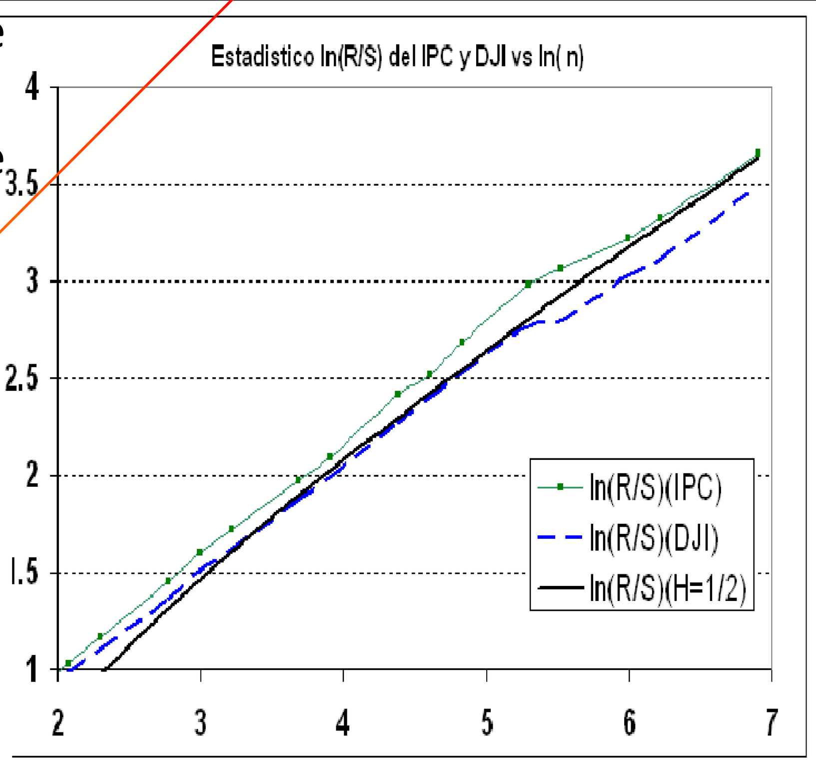
Valor de H

- Si H = 0.5 implica un proceso independiente. No requiere de un comportamiento normal del subyacente
- Si 0.5 < H < 1.0 implica series de tiempo persistentes, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. (Ruido negro)
- Si 0.0 < H < 0.5 significa antipersistencia en la serie de tiempo.(Ruido rosa)



Aplicando la metodología (R/S) a variables financieras índices (IPC y DJI) y monedas peso-dólar (TDC) y dólar- euro (TDCUS)

Serie	H	$E(H)$	$DE(H)$	$(H-E(H))/DE(H)$	Acepta Ho
IPC	0.5512	0.5726	0.0223	-0.9596	S
TDC	0.5096	0.5726	0.0223	-2.8251	S
DJI	0.5151	0.5726	0.0223	-2.5785	S
TDCUS	0.5499	0.5726	0.0223	-1.0179	S



Comparativo entre un proceso estocástico con movimiento browniano y con browniano fraccional

Movimiento Browniano Tradicional

Un movimiento browniano $(W(t))_{t>0}$ en un espacio de probabilidad fijo, con una filtración esta definido por las siguientes propiedades:

i) $W(0) = 0$

ii) Si $0 < t_1 < t_2 < \ < t_n$, entonces $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2) W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes

iii) Si $s < t \Rightarrow$ entonces $W(t) - W(s)$ se distribuye como $N(0, t-s)$

Autosimilaridad del Movimiento Browniano Tradicional

$$W(at) = a^{\frac{1}{2}} W(t), \quad \forall t.$$

to Browniano Fraccional

$_H$) con parámetro Hurst (H)(definido en el capítulo anterior), $0 \leq H \leq 1$, es
aussiano que se define por las siguientes propiedades:

)

$= 0 \ \forall t \epsilon R$

$= \mathrm{E}[B_H(s) B_H(t)] = H(2H-1) \int_0^t \int_0^t |t-s|^{2H-2} ds dt$

$= \frac{1}{2}[|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}]; \ \forall \ s \ y \ t \ \epsilon R$

aridad del Movimiento Browniano Fraccional

$$B_H(\alpha t) = \alpha^H B_H(t), \ \forall t$$

Al modelar las series financieras con un proceso browniano fraccional se pierden las propiedade financieras de no arbitraje y martngalas. Para poder recuperar estas condiciones, se utiliza el cálculo Malliavin

Movimiento Browniano Fraccional

En el caso de H sea distinto de ½, l la integral de trayectoria

$$\int_0^T \phi(t,w) dB_H(t) = lim_{\delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t_k).(B(t_{k+1}) - B(t_k))$$

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \phi(t,w) dB_H(t)\right] \neq 0$$

BH
- No es un proceso markoviano
- No es martigala (semi)
- Puede existir arbitraje

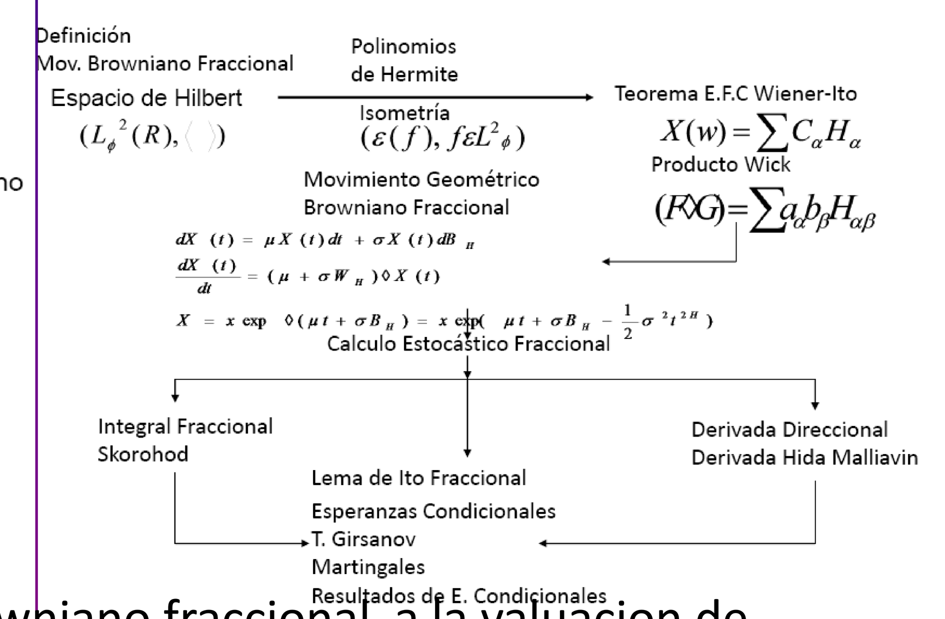
En el caso de H sea distinto de ½, la integral Skorohod

$$\int_0^T \phi(t,w) dB_H(t) = lim_{\delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(t_k) \diamond (B(t_{k+1}) - B(t_k))$$

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \phi(t,w) \delta B_H(t)\right] = 0.$$

BH No presenta arbitraje

Antecedentes Matemáticos



Aplicando la modelación del proceso browniano fraccional a la valuacion de opciones financieras Call

Ecuación Black-Scholes Fraccional

Precio Fraccional de un Call Europeo

$$C(t, S(t)) = S(t) N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}},$$

y

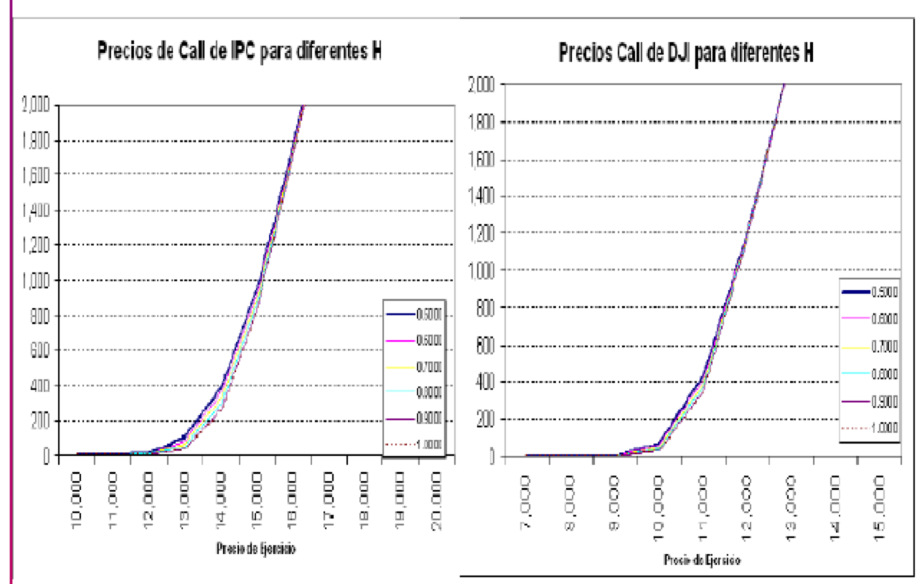
$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}.$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

on condiciones de Frontera:

$$C(t, S) = \mathrm{Max}(S - K, 0).$$

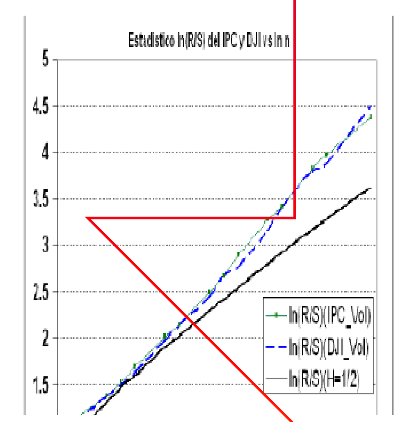
Precios de Opciones Fraccionales Europeas de Índices



Y modelando la volatilidad de las variables financieras con un proceso browniano fraccional

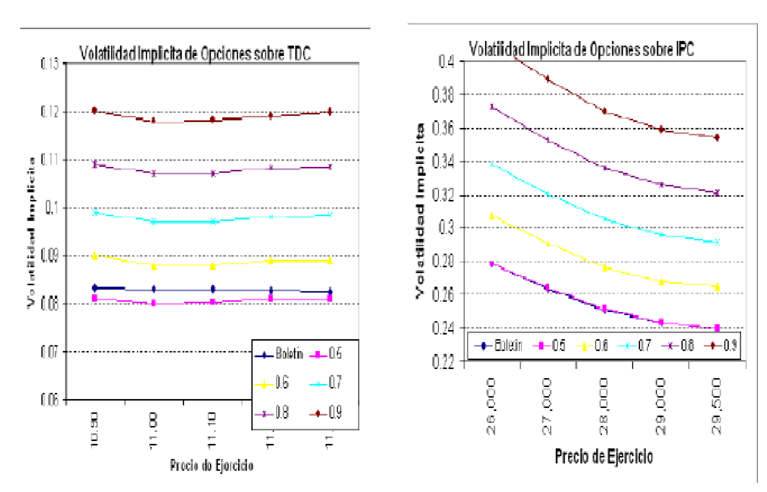
Exponentes Hurst de Volatilidad de Indices

Serie	H	$E(H)$	$DE(H)$	$(H-E(H))/DE(H)$	Acepta Ho
IPC	0.7384	0.5726	0.0223	7.4350	N
TDC	0.7279	0.5726	0.0223	6.9641	N
DJI	0.7469	0.5726	0.0223	7.8161	N
TDCUS	0.6814	0.5752	0.0243	4.3704	N



Volatilidad Implícita

Volatilidad Implícita de Opciones Fraccionales Europeas



Conclusiones

-La aplicación de la metodología (R/S) para determinar los coeficientes Hurst de las series (IPC,TDC,DJI,TDCUS)muestran características de memoria larga, principalmente en su respectiva volatilidad.

-Se obtiene un precio teórico menor para una opción call y put cuando las series tiene características de persistencia, lo que implicaría una sobreestimación en mercados con memoria.

-La volatilidad estocástica e implícita es mayor cuando la serie tiene características de memoria larga

-Las series de las variables analizadas son autosimilares

Bibliografía Principal
1) Black, F. and M. Scholes (1973) The pricing of Options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-659

2) Necula C. (2002) Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment, Academy of Economic Studies, Bucharest Romania.

3) Peters, E. (1991), Chaos and Order in Capital Markets, New York: John Wiley and Sons.

[17] Oksendal B.(2004) Fractional Brownian Motion in Finance Preprint Preprint University of Oslo.